487. 到ル處連續ナ解析函數ニ就イテ I

角谷　靜夫（阪大）

到ル處（∞ヲコメテ）連續ニテ、アル閉集合E以外ニテ正則ナ函數ノ性質ハ Pompeiu, Denjoy, Golo*u*beff, Urysohn, Federoff, Wolibner 等ニヨッテ研究サレタ。[1)]

コヽデ問題トナルノハ常數以外ニカヽル函數ガ存在スルタメニEガ滿足スベキ必要且ツ十分ナ條件ハ何カト云フコトデアル。（適當ナ一次變換ヲホドコセバ E ハ有界閉集合トナルカラ、今後 E ハ有界閉集合デアルト考ヘルコトニナル）。

---

1) Pompeiu, Annales de Toulouse, (2) 7, (1905) p. 314.
Denjoy, C. R. t. 149 (1909) p. 258.
Golo*u*beff, C. R. t. 158 (　　) p. 1407.
Urysohn, Fundamenta mathematicae t IV, p. 144.
Federoff, Bull. int. Acad. Polonaise, cracovie, 1927.
Wolibner, Comptes Rendus, Varsovie, 1933. p. 56.

コレニ對シ Pompeiu ハ E ガ linear measure (Minkowski ノ意味デ) ガ ∞ デアルコトガ必要デアルコトヲ示シ、Urysohn ハ平面上ノ Cantor ノ集合 P (正確ニ各辺ヲ三等分スルコトニヨリ得ラレルモノ) ニ對シテ、到ル処連続ニテ P 以外ニテ正則ナ函数ガ存在スルコトヲ示シタ。シカシ E ガ満足スベキ必要且ツ十分ナ條件ヲ測度的ニ決定スルコトハ困難ナコトニ思ハレル。

更ニ函数ガ E デ連続デアルコトヲ假定セズ，單ニ有界デアルト云フコトニスレバ如何、即チ E 以外ニ於テ有界正則ナ、常数デナイ一價函数ガ存在スルタメニ、E ガ満足スベキ必要且十分ナ條件ハ如何ト云フコトガ問題トナル。[2)]

同様ナ問題ハ harmonic function ノトキニモ考ヘラレ、「E 以外ニテ有界, harmonic ナ函数ガ存在スルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ E ノ capacity (正確ニハ E ノ $\log\frac{1}{r}$ ニ関スル capacity) ガ正デアルコトデアル」コトガ知ラレテヰル。然ルニ capacity zero ノ集合ヲ測度的ニ characterize スルコトハ未ダ成功シテイナイノデアル。[3)]

然ラバ解析函数ノ場合ニモ capacity ノ考ヘヲ使ヘバ如何ト云フニ、capacity ノ考ヘヲ使ヘバアル程度マ

---

2) R. Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen p. 132.

3) R. Nevanlinna, loc. cit p. 145.
Frostman, Thèse 紙上談話會 67号 278, 70号 300.

デ様子ハ明カトナル。

即チ

1−1°. Eノ $\frac{1}{r}$ ニ関スル capacity[4)] ガ正デアレバE以外ニテ正則有界ナ常数デナイ一價函數ガ存在スル。

1−2°. Eノ linear measure (Hausdorff ノ意味ノ) ガ 0 ナラバ函數ハ常數以外ニ存在シナイ。

2−1°. $\int_0 \frac{h(t)}{t^2} dt < \infty$ ナル如キ $0 < t < \infty$ ニテ定義サレタ positive nonnegative ナ函數 $h(t)$ ニ関シテ測ッタEノ外測度 (Hausdorff ノ意味ノ) ガ正ナラバ E以外ニテ正則デEヲコメテ連続ナ函數ガ常數以外ニ存在スル。

2−2°. Eノ linear measure (Hausdorff ノ意味ノ) ガ有限ナラバ、カヽル函數ハ常數以外ニ存在シナイ。

コヽデ注目ニ價スルノハ先ヅ第一ニ $\frac{1}{r}$ ニ関スル capacity ガ現ハレルコトデアル。コレハ E以外ニテ正則ナ函數 $f(z)$ ガ一般ニハ $f(z) = \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{z-\zeta}$ ナル形ニ表ハサレルコトガ原因スル。(コヽニ $\mu(\zeta)$ ハE上ヘノ Mass ノ分布ヲ表ハス。又、$f(z)$ ハ ∞ ニ於テ0デアルモノトスル。コレハ $f(z)$ ハ ∞ ニ於テ正則ト假定シテアルカラ常數ヲ引イテオケバヨイ。又コノ積分ノ意味ハ後デ説明スル)。

第二ニ、2−2°ニテEノ linear measure ガ有限デアレバヨイコトデアル。

---

4) Frostman Thèse 48p. 紙上談話會 83号 372.

harmonic function ノ場合ニハ之レニ對應スル定理ハ得ラレテヰナイ。（E ノ $\left(\log\frac{1}{r}\right)^{-1}$ ニ関スル measure ガ有限ナルトキ E ノ $\log\frac{1}{r}$ ニ関スル capacity ガ 0 ニナルカドウカハ未ダ解決サレナイ。

又 E 以外ニテ harmonic〔∞ニテハ $\log\frac{1}{r}$ ノ形〕ニシテ E ヲコメテ連續ナ函數ガ存在スルタメニ必要且十分ナ條件ハ求メラレテヰナイ）

次ニ、2 — 1° ハ Urysohn ノ結果ヲ含ンデヰル。Cartor ノ集合 P ニ於テハ $h(t)=t^{\frac{2}{3}}$ ニテ測ッタ外測度ガ正デアル。

最後ニ Pompeiu ノ研究ニ於テハ Minkowski ノ linear measure ガ現ハレタガコレガ Hausdorff ノ measure デ置キカヘラレルコトデアル。Minkowski ノ linear measure ガ 0 ナラバ Hausdorff ノ linear measure モ 0 トナルガ Minkowski ノ linear measure ガ正又ハ ∞ ニテ Hausdorff ノ linear measure 0 トナル集合ガ實際存在スル。